appartient à la tangente au sommet à la parabole P et déduire que S appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [FJ].

b- Soit R un point de $\mathcal{C}$ distinct de F. Montrer que la parabole de foyer F et de sommet R est tangente à Δ en un point que l'on déterminera (il est conseillé de faire une figure séparée pour cette question).

c- Déterminer alors l'ensemble des points S quand le point M varie sur Δ.

PROBLEME

I] Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/a- Etudier les variations de f. En déduire que $\forall x \in IR$ on a : $0<f(x) \leq 1$

b- Tracer la courbe C_f.

2/ On considère la fonction g définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = Log(tgx)$.

a- Montrer que g est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$; $\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[$

b- Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur IR. Calculer h(0).

c- Montrer que h est dérivable sur IR et que $\forall x \in IR; 2h'(x)=f(x)$. En déduire $\forall x \in IR; \int_0^x f(t)dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$.

II] Soit $n \in IN$ et F_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F_n(x)=\int_0^x f^n(t)dt$

1/a- Calculer $F_1(x)$ en fonction de h(x) et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x)=\frac{\pi}{2}$

b- Soit K la fonction définie sur IR par $K(t)=\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$.

Montrer que $K'(t) = f^2(t)$

Calculer alors $F_2(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x) = 1$.

2/a- Montrer que l'image de l'intervalle $[0;+\infty[$ par F_n est l'intervalle $[0; \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)[$.

b- Vérifier que $\forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) < 2e^{-t}$.

En déduire, en utilisant **I]1/a-**, que $\forall x \in IR^+$ on a $F_n(x) \leq 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est finie.

c- Vérifier que $\forall t \in IR_+^*$ on a $f(t) > e^{-t}$.

Montrer alors que $\forall x \in IR^+$ on a $\frac{1 - e^{-nx}}{n} \leq F_n(x)$

et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est non nulle.

3/ Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

a- Donner la valeur de u_1 et la valeur de u_2.